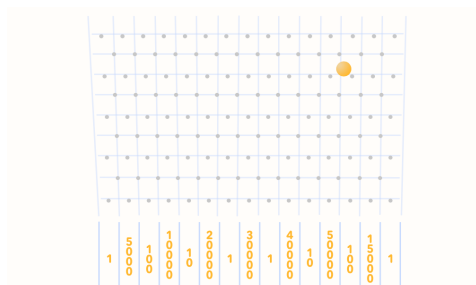


La planche de Galton

Contexte



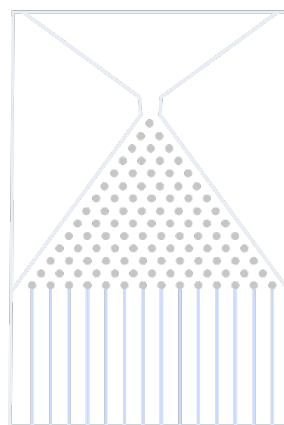
En 2017, un jeu inspiré des Etats-Unis fait son apparition à la télévision française : "The Wall, face au mur". Dans ce jeu, les candidats doivent répondre à des questions de culture générale et leurs gains (ou pertes, en fonction de la réponse à la question) sont décidés par le hasard : une bille descend d'un mur de 12 mètres criblé de clous, faisant rebondir la bille ici et là, et atterrit dans un compartiment auquel est associée une somme d'argent.

Une vidéo de présentation de l'émission est accessible à cette adresse : <https://youtu.be/vBlWZfzFgo4>. Le principe de ce mur géant rappelle le principe de la planche de Galton, invention d'un statisticien britannique du même nom. En partant du cas simple de la planche de Galton, nous allons tenter de déterminer le gain moyen obtenu lors du jeu télévisé.

Planche de Galton

Une planche de Galton est composée de plusieurs rangées de clous positionnés de façon triangulaire (voir ci-contre). Ainsi, la n -ième rangée, par exemple, est composée de n clous. Le diamètre de la bille ainsi que l'écartement entre les clous sont choisis de façon à ce que, lorsque la bille tombe sur un clou, la probabilité qu'elle tombe à gauche est identique à la probabilité qu'elle tombe à droite.

Nous allons prendre l'exemple d'une planche de Galton composée de 10 rangées de clous.



1. Combien de compartiments se trouvent en bas de la planche ?
2. Quelle est la probabilité que la bille tombe dans le compartiment le plus à gauche ? On note 0 le compartiment le plus à gauche, 1 le suivant et ainsi de suite. On pose X comme étant la variable aléatoire

associée à chacun des compartiments.

3. Pourquoi la position de la bille en bas du mur suit-elle une loi binomiale? Quels sont ses paramètres?
4. A l'aide de l'outil Statistiques de la calculatrice, dresser un tableau de probabilité pour chacune des valeurs de la variable aléatoire. Que remarque-t-on? Dans quel compartiment la bille tombe-t-elle le plus souvent?
5. On propose dans cette question d'utiliser le mode Python de la calculatrice.
 - (a) Ecrire un algorithme en Python permettant de connaître le nombre de billes parmi b tombées dans le compartiment k d'une planche de Galton composée de n rangées. On testera par exemple le nombre de billes contenues dans le compartiment n°3 sur 200 billes lâchées au départ sur une planche de Galton de 10 rangées.
On pourra par exemple utiliser un compteur pour compter le nombre de chemins "gauche" ou "droite" empruntés par une bille, ces chemins étant empruntés aléatoirement à l'aide d'une fonction de type `randint(0,1)` qui retourne aléatoirement soit un 0, soit un 1.
Par exemple, une bille ayant toujours emprunté le chemin "gauche" par une succession de 0 aléatoires finit dans le compartiment n°0. A l'inverse, une bille ayant emprunté 10 fois le chemin "droite" par une succession de 1 aléatoires finit dans le compartiment n°10.
 - (b) Tester les différents paramètres : Comment évolue le nombre de billes dans un compartiment donné si l'on augmente le nombre de rangées dans la planche? Si l'on augmente le nombre de billes lancées au départ? Pour une configuration donnée, quels sont les compartiments qui contiennent le plus de billes?

Retour au "mur"

La planche de Galton de l'émission télévisée est légèrement différente. Composée de 14 rangées de clous, la bille peut être lancée lors de la première manche depuis trois positions différentes au sommet du mur : au centre ou à l'une des deux extrémités. En bas, les sommes allouées aux différents compartiments sont les suivantes :

1€	500€	100€	2000€	10€	1000€	1€	5000€	1€	1000€	10€	2000€	100€	500€	1€
----	------	------	-------	-----	-------	----	-------	----	-------	-----	-------	------	------	----

Le candidat doit donc choisir la position de départ qui lui semble la plus propice à l'obtention du gain maximal. Nous allons nous intéresser au gain que l'on peut espérer obtenir en partant de la position n°4, c'est-à-dire la position centrale, afin de rester dans une situation similaire à celle d'une planche de Galton de 14 rangées.

1. On note Y la variable aléatoire associée au gain obtenu à l'issue d'un premier lancer de bille. Quelle est la loi de probabilité que suit Y ?
2. En moyenne, quelle somme peut-on espérer obtenir en lançant la bille depuis la position centrale?