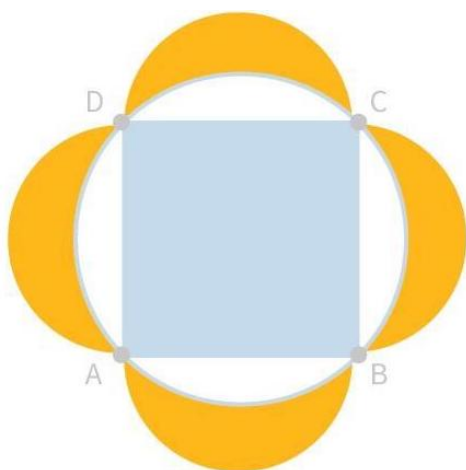


Le problème des lunules

On attribue la formulation de ce problème à Hippocrate de Chios, qui vécut au Ve siècle avant notre ère.



On considère un carré de côté c que l'on inscrit dans un cercle, de rayon r . On construit ensuite quatre lunules à partir des côtés du carré, c'est-à-dire que l'on construit les demi-cercles de diamètre AB, BC, CD et AD et on s'intéresse à la surface de ces demi-cercles auxquels on soustrait la surface contenue dans le cercle de rayon r . Les lunules apparaissent en jaune sur la figure.

Nous allons montrer que l'aire de ces quatre lunules est identique à l'aire du carré ABCD.

1. Exprimer la relation existant entre c et r .

$$c = r\sqrt{2}$$

2. On s'intéresse à la lunule construite sur le côté AB. Exprimer en fonction de r , puis en fonction de c , la surface comprise entre le segment $[AB]$ et l'arc de cercle $\widehat{AB}$.

On appelle O le centre du cercle et du carré ABCD.

La surface comprise dans le quart de cercle auquel appartient l'arc de cercle $\widehat{AB}$ est égale à $\frac{\pi r^2}{4}$. On y soustrait la surface du triangle OAB, soit $\frac{r^2}{2}$. D'où une surface à égale à $(\pi - 2) \frac{r^2}{4} = (\pi - 2) \frac{c^2}{8}$.

3. En déduire la surface de la lunule.

On soustrait le résultat obtenu à la question précédente à l'aire du demi-cercle de diamètre AB. L'aire du demi-cercle de diamètre AB est égale à $\frac{1}{2}\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2$, d'où :

$$A_{lun} = \frac{\pi c^2}{8} - (\pi - 2) \frac{c^2}{8} = \frac{c^2}{4}$$

4. En conclure que la surface des 4 lunules est égale à la surface du carré ABCD.

D'après le résultat précédent, la somme des surfaces des lunules est égale à c^2 , ce qui est bien l'aire du carré ABCD.